確率についての書簡　Ⅲ

パスカルからフェルマーへの書簡

― 第二書簡（オルレアンのピエール・フェルマー宛）―

岡　部　　　毅

親愛なるフェルマー 殿

パリ、1654年11月6日

貴殿がカルカヴィ氏に言付けて私に下さった御手紙ほど、大きな喜びをもたらして呉れた手紙を、私は今までに手にしたことはありません。10月28日の私の手紙を貴殿がどのように御理解なされたのかをカルカヴィ氏に問いただそうと、彼の帰りを首を長くして待ち侘びていました。彼の帰りを待ちながら、貴殿がすぐにでも私への返事の御手紙を送り届けて下さる、という貴殿の御約束を彼が私に持ってきて呉れることを望んでいました。彼が私の手紙に対する貴殿の御返事を持ってきて呉れたことは、私が厚かましくも持っていました期待を遙かに凌ぐものでありました。貴殿の御手紙には数ケ月間の熟考を要する内容を含んでいて、また私の早急な貴殿への御手紙への御返事は、それ故に当然のこと完全ではありえないであろうにもかかわらず、直ぐに御返事しょうとしている次第であります。私が行なっていますチェス・ゲームにおいては、大抵熟考する時間を制限し、ゲームの流れを砂時計を使って統制するという習慣があります。私達の書簡交換は、実にそのようなチェス・ゲームに似ていますし、このゲームにおいては貴殿がお勝ちに成ることは分り切っていることに一向に気にも掛けず、心より喜んでゲームを行なう私であります。

ここで貴殿の御質問にお答えしてみたいと思います。正しいか誤っているかは、貴殿が判断されることではありますが、私はすでに以前にその問いを自分に課してみましたし、それ故に私にとりましては準備の出来てないものでもありませんので、直ぐにその御質問にお答え出来るのであります。先の貴殿への御手紙に封をしましたときに、すでにこの御質問には一なかんずく第二の御質問には一その御手紙の中で言及すべきだったと自分には判っていました。このようなことは私にはよく起こるのであります。つまり、私が何かを書きますと、その最後になって初めて、またそこから書き始めるべきであったということが判る、というようなことがよくあるのです。しかし私は自分の癖を良く知っていますし、また決してその書き出しでは満足ではないのですが、私の手紙が終わりになり最後のピリオドを一旦打ってしまうと、仮りに書き直してみましたところで、また最後では再び不満足であろうことを十分に知っていますので、その手紙に変更を加えずに投函するのであります。

貴殿の第一の御質問へのお答えは本当に簡単であります。その問いは貴殿には良く理解されているものと確信しています。ただ、貴殿は私がその問いで問われていることを、如何に徹底的にじっくりと考察しているのかをお知りになろうとして、私をお試しに成りたいのだと思います。偶然に任せたゲームにおいては一私が提示しましたように一ある１つの

生起事象の確率は、考えられる生起事象の中の有効な生起事象の数を、等しく生起可能でありそして相互に排反的な全ての生起事象の数で割ることによって計算されることと、貴殿の問いは関連しています。≫等しく生起可能な≪生起事象の代りに≫等確率の≪生起事象と言い換えることが出来ることに貴殿がお気付きになられますと、貴殿の考えは全く正しいのであります。つまりその2つの表現は同じことを意味しているからであります。貴殿は循環論証が問題であるのではないかとお尋ねされています。つまり一見確率の定義は≫等確率の生起事象≪という概念に根拠に置いていますので、その結果、丁度誰かが自分の髪を引き上げて自分を高く吊り上げえると主張するときのように、私達は確率を確率自身によって定義するという当然許されない、不合理なことをしてしまったのではないのかと。

しかしながら、実はここには何の論理的欠陥はありません。なぜならば、概念としての確率の定義が問題であるのではなく、ある確率の数値を決定する規則に関係しているのであります。私の仮定によりますと、全ての偶然なる生起事象は、ある1つの確率を所有し、その確率は0と1の間の1つの数値であり、当該の必ずしも生起するのではない生起事象の生起する程度を示すものであります。この確率を示す数値を知ることはなくとも、2つの生起事象が等確率であるかないかを決定しえます。もしサイコロが規則正しいものであると言うとき、そのことは、もしサイコロの側面に数字が記してなければ、どの側面が出たものかを全く区別が出来ないということであります。誰か私の居ない間にサイコロの数字を付け換えたところで、そのことに私は全く気付きえません。そのような規則正しいサイコロでは、6つのそれぞれの目の出る確率は同じであります。ここでの事態は、1本の紐を2つに切り、その2本を一緒にして並べて長さを比較したりしないで、2本の長さは同じかどうかを決める事態と良く似ていますし、2つの対象物の重さを計ることなく、これらの2つが同じ重さかどうかを天秤計でもって決めるのにも似ています。

貴殿の第2の御質問へのお答えはそんなに簡単ではありません。貴殿の御質問は、即ち重心が幾可学的な中心にないような如何様サイコロ（例えば、鉛の入ったサイコロ）においては、如何に個々の目の出る確率を決めえるのか、というものであります。一見くだらぬように思えるこの問いは、実に深い問題を含んでいます。この問いに答え得るためには、まず1つの基本的な問いが解明されねばなりません。その問いとは、本来すでに最初の御手紙で私が言及すべきであったものであります。もし貴殿がこの問いを私の友人であるシェバリエル・ド・メレ氏に提示されるとしますと、「自分はただ行儀の良い人達とだけゲームをし、そして正しくないサイコロを使用している人はそのことを明らかにし、その正しくないサイコロを無造作（意図的でなく）に投げるというような人達の集まりの中でゲームをするのを常にしている」と述べることによって、彼は貴殿の問いにお答えしょうと試みるでありましょう。しかし、ここで貴殿は当然のことながら、「一体そのサイコロが正しいものであるのかどうかを如何に決めることが出来るのか」をまた御質問なさるかも知れません。その御質問に対して、シェバリエル氏は勿論、「正しくないサイコロでは正しいサイコロよりも多く6の目が出るということから判断するより他に、その問いに答えることは出来ない」とお答えするでしょう。なぜならば、6の目が多く出ることが如何様サイコロのねらいだからであります。

しかしまだ貴殿が、「シェバリエル氏は如何様でないサイコロで理論的にどんな結果を期待

するであろうか」、と御質問される一貴殿とのこの擬似問答をお許し下さることをお願い致します一ならば、彼は当然次のようにお答えするでしょう。つまり、「十分に長く続けられるゲームにおいて、6の目は大体他の目と同等に生起するに違いないし、また、6の目の出る回数はサイコロ投げの総回数のうちの$1/6$に近いものである」と。これでシェバリエル氏は貴殿の本来の御質問にお答えしたことになるでしょう。なぜなら、もし正しくないサイコロを使って、N回のサイコロ投げのうちX・N回6の目が出るとすると一ここでXは$1/6$より大きな数値であります一、明らかに正しくないサイコロを投げて6の目の出る確率はXであります。するとここでまた、貴殿は更に難しい1つの御質問を提示されるでありましよう。つまり、その問いと言うのは、「正しくないサイコロを使って600回のサイコロ投げをして150回6の目が出たとすると、このサイコロを使うと6の目の出る確率は“丁度”$150/600=1/4$であるということを意味するのではないのか」ということです。(シェバリエル氏が先の貴殿への私の手紙を読み、そこで私が使用した表現を使うと仮定すると)シェバリエル氏は、「その貴殿の判断は少し早まった判断であろう」とお答えするでありましょう。なぜならば、もし仮にサイコロが正しいもので、6の目が出る確率がよしんば丁度$1/6$であるとしても、そのことでもって600回のサイコロ投げで丁度100回6の目が出るとは言い切れるのではなく、ただ“大体”100回6の目が出るのだと言えるだけであるからであります。それ故に、先の正しくないサイコロを使っての結果は、そのサイコロで6の目の出る確率は丁度$1/4$であることを意味しているのではなく、ただその確率は$1/4$に近いものであることのみを意味しているのであります。すると貴殿はまた、「如何にして求めんとする確率の正確な値が決められるのか」と御質問なさるでありましょう。シェバリエル氏(熟練したゲーム者としての)は、「求められている確率の値を正確に決定する方法を自分は知らないが、しかし、もし貴殿が近似した値で満足されなければ(今言及されています実験はサイコロの不良性をかなりはっきりと示し、このサイコロは直ぐに燃やされてしまうものでありますが)、貴殿はもっと多数回のサイコロ投げ一大体1200回一を実行されますと、正確な確率値により良い近似を達成しえるでありましょう」とはっきりお答えするでありましょう。例えば、もし1200回のサイコロ投げで288回6の目が出たとしますと、求められている確率の信頼しえる近似値$288/1200=0.24$を得ます。より正確に申しますと、「サイコロは全く稀にしか正しいものでなく、丁度嘘をつくのが無限に可能でありますように、サイコロには無限に多くの種類の不良な点が存在するものだ」とシェバリエル氏は更に付け加えるでありましょう(というのも、すでに私が申し上げましたように、彼は最近大変哲学に興味を持っているからであります)。

私はこの擬似問答をこれ以上行ないたくはありません。なぜならば、これ以上のことをシェバリエル・ド・メレ氏からは貴殿は何も聞き知ることは出来ませんし、貴殿はこのことをよく御存知なので、その代りに私は私の言葉でもって貴殿の御質問にお答えしょうと思います。

簡単に表現するために、まず幾つかの定義を先に述べたいと思います。もし私達が同じ事態のもとで何度も繰り返し1つの試みを実行するとき、ある1つの事象Eが生起する試み回数は事象Eの“頻度”と呼ばれ、全試み回数に対する事象Eの頻度の割合は、全試み回数に対するEの“相対頻度”と呼びます。すると、ゲームに際してある事象の相対頻度は、そのゲームが長く行なわれるとすると、一般に、その事象の確率でありますある1つ

のしかるべき数値に近づくことを、賭け事に少しでも経験のある人は皆知っていますし、大体においてゲームが長く行なわれれば行なわれるほど、確率を示す相対頻度の振れはますます小さくなります。例えば、サイコロゲームにおいて、サイコロが正しいものであれば、100回のサイコロ投げで6の目の出る相対頻度は1/6に近いものであろうし、またサイコロが正しくないものであれば、他のある数値に近いものでありましょう。正しくないサイコロの場合には、それぞれの目の出る確率を近似的に決めることが唯一の方法であります。原則的には、この経験的方法で正しくないサイコロにおけるそれぞれの目の出る確率に接近しえますが、実践的には、当然その正確さを無制限に高めることは出来ません。つまり、実践的に正確さを高めようとしますと、大変な時間を必要としますし、全ての他のことは除いたとしましても、多数回のサイコロ投げの過程におきまして、サイコロは完全に磨り減ってしまうでありましよう。しかし、貴殿が本当に興味をお持ちに成っているのは、正しくないサイコロを使ったときの6の目の出る確率を示す正確な数値にあるのではなく、貴殿の御質問の本当の内容は、生起事象が全て等確率で生起するという条件のもとで、ある1つの目指す事象を数えていくことが出来ない問題の場合には、偶然に支配されるある事象の確率を一体どうして決定するのか、ということであろうと思います。正しいサイコロの場合（しかし正しくないサイコロの場合ではない）に私達が使用する規則は対称思考と呼ばれます。なぜならば、その規則は正しいサイコロの対称性に依存しているからであります。水晶の例は、即ち自然の中にも対称性が存在するが、人間の手に成るものには対称性がないことを示しています。勿論、自然現象の中には全然対称性を示さないものがたくさんあります。海岸で水に洗われ研かれた小石を考えてみますと、おおよそ円形をしていますが、どれ1つとして完全に正しい円形をしたものはありません。人間自身もまた完全には対称ではありません。古代ローマ王朝において兵士達は、一様な木のサイコロや象牙のサイコロを使用したのではなく（これらのサイコロは裕福な人達だけが使用しました）、タルスとかタキルスと呼ばれた山羊や羊の膝骨で作ったサイコロを使用したということを、最近どこかで読みました。古代ギリシャでは、アストラガロスと呼ばれてこの骨のサイコロが使用されていました。この骨のサイコロが色々と異なった一様でない目の出方をする場合の確率は、ただ相対頻度を観察することによってのみ、経験的にのみ近似的に決定されるのであります。

そのタキルスと呼ばれるサイコロには、やはり6個の面がありますが、そのうちの2面は湾曲して突き出ているので、タキルス・サイコロはただ4面だけで安定するのであります。ギリシャ人とローマ人は、1度にそれらの4個のサイコロを振り、4個のサイコロの全てが異なる面を出した場合が最も価値あるものと考えました。この場合をヴィーナスと呼びました。最近、私はそのようなサイコロを2個手に入れ、それらで少し実験を行なってみました。その一方のサイコロを使っての1000回のサイコロ投げで、4つの面の頻度はそれぞれ、408回、396回、91回、105回、でありました。他方のサイコロでは、100回ほどサイコロ投げをしたところで、そのサイコロを無くしてしまいました。その100回のうち、それぞれの頻度は、38回、43回、11回、8回、でありました。私達はそのタキルス・サイコロの、より頻繁に出る2面をA、Bとし、それに比べて出る頻度が少ない方の2面をC、Dと呼ぶことにします。面Aと面Bの出る確率は1/4で、面C、と面Dの出る確率は1/10であると便宜上仮定しましょう。私の実験によると、この仮定は大方正しいでしょう。貴殿が御

自身で計算なされば簡単にお分りのように、この場合では、4個のタキルス・サイコロを一度に投げて、ヴィーナスと呼ばれる4面とも異なる場合の確率は$^{24}/_{625}$であります。つまり私の先の御手紙で言及しました乗法定理に従いまして、まず4つの確率が全て掛け合わされなければなりません。それは、$\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{625}$となります。これに加えて、4つのタキルス・サイコロがある一定の順序で4つの面A、B、C、Dを示す確率が存在します。ここで4つの文字A、B、C、Dは24通りの方法で配列可能でありますので、ヴィーナスと呼ばれる場合は、24通りの相互に排反的な順列で生起しえることになります。そこで加法定理によって、$\frac{1}{25}$より少し少さい確率$\frac{24}{625}$でヴィーナスと呼ばれる事象を得ることになります。それによって、ローマ人がヴィーナスという事象を経験した場合に、どうしてそこに幸運を見たかがはっきりします。

タキルス・サイコロは、当然全て相互に決して等しいことはありません。そこで、面A、の生起する確率は、それぞれの異なるタキルス・サイコロで等しくはないこと、つまり、あるサイコロでは0.4で、他のサイコロでは0.38等々であることが考えられます。しかし、私達がある1つのタキルスサイコロを選びますと、そのサイコロでAの面が出る確率は、大体決まった数値であります。しかし、前述しましたような多数回の連続的なサイコロ投げにおいて、ある特定のタキルス・サイコロを使ってA面の出る相対頻度は、偶然に支配されますので、ある程度は不定であります。しかし、A面の出る確率の近くにA面の出る相対頻度があることだけは、はっきりとしています。例えば、A面の出る確率が0.4であるような1個のタキルス・サイコロを使って、100回のサイコロ投げを実行しますと、丁度40回A面が出る、というのは正しくなく、この数はまた39回であったり、41回であったり、44回であったり、36回であったりするのであります。もし私達が、100回のサイコロ投げを1系列として、それを何回も繰り返して、多数の系列を実行しますと、各系列でのA面の相対頻度は、一般的には各系列で異なりましょう。しかし、A面の相対頻度は、ほとんどいつもA面の出る確率、つまり0.4に近いものであるでしょう。確率は固定点であり、相対頻度は偶然な予測しえない仕方で、その固定点のまわりで動きます。しかし、その固定点からは、大体気まぐれ的な範囲内で僅かにずれるだけであります。もし観察数を多くしますと、当該事象の頻度の期待値（総観察数と当該事象の生起確率の積）からのずれは、一般には、同様により大きくなりますが、しかし確率を表わす相対頻度のずれは、大体においてより小さくなります。例えば、1個のタキルス・サイコロを使って400回のサイコロ投げを実行しますと、C面の出る頻度は、期待値つまり$400\cdot{}^{1}/_{10}=40$回から12回より少ない範囲内でのずれを示すでしょう。しかし、1000回のサイコロ投げを実行するとしますと、C面の出る頻度は、期待値つまり$1000\cdot{}^{1}/_{10}=100$回から12回またはそれ以上の回数のずれを示すでしょうが、20回以上のずれを示すことは稀であります。このことは、400回のサイコロ投げにおいて、C面の出る相対頻度は、大体$\frac{7}{100}$と$\frac{13}{100}$の間に、1000回のサイコロ投げにおいては、しかしながらより狭い範囲である$\frac{8}{100}$と$\frac{12}{100}$の間にあるだろうということであります。

そこで偶然に支配される1つの事象の生起確率は、偶然に支配されない、しかるべき決った1つの数値であるのに対して、生起事象の相対頻度は偶然に支配され、はっきりとしたその数値をあらかじめ決めることは不可能である不確定な数値であります。観察を通して、相対頻度の値を私達は知り得ますが、この得られた値は、それ以外の値である可能性

があったのだということを決して忘れてはなりません。つまり、もう一度サイコロ投げを実行して観察しますと、実際にはそれ以外の値が出る可能性を見ていなければならないということです。もし私達がある事象の生起確率を知っているとします（例えば、私達はその確率を対称思考によってか、加法定理と乗法定理を使用してか、または他の何らかの規則でもって知る）と、私達は相対頻度の値をある程度の正確さで前もって知りえます。他方、私達は相対頻度の観察から、その確率の値を一もしこの確率がまだ未知である場合には一ある程度の正確さで推則することが出来ます。しかし、この二様の推論はその性質からして根本的に異なっています。第一の推論（確率を知って、相対頻度を推則する）は、丁度ある対象物の比重と体積が既知で、その対象物の重さを計算するのと全く同じ性質のものであります。それに対して、第二の推論（相対頻度の観察から確率を推則する）は、あたかもある材料から成る対象物の重さと体積から、未知であるその材料の比重を計算しようとするような性質のものであります。その上に、同じ材料から成る色々の対象物を用いて、その材料の比重計算を行ないますと、そこで得られた比重の値は、全ての測定においてはいつも誤差が付きまとうていますので、正確にはみな同じではなく、ただ互いに近似しているだけであります。

確率と相対頻度は、それ故に、正確な比重値と測定によって算出された比重値との間にみられるのと、丁度似た関係に立つものであります。だから、相対頻度の観察は、確率を測定する一方法と理解されます。この測定方法は、ただ不確かな値（全ての他の測定法と似て）を提供はしますが、しかし、この測定の不確かさは観察数を多くすることによって減少させられます。しかしながら、この方法で、ある確率を絶対的な正確さでは、決して決定し得ません。事実は常に変化するので、起る事実からは決して完全なる正確さで生起するという確証を得ることは出来はしない、ということをかってモンテニューは確認しました。私達はこのモンテニューの確認を少し言い換えたいと思います。つまり、起きる事実からは、確実さの程度を完全にはっきりとは得られないと。それ故に、実際には、不完全な確実さの程度についての不完全なる知識でもって満足しなければなりません。このことは、私の手紙の大部分が途中で紛失したがために、貴殿がその手紙の一部だけしか受け取れなかった場合や、手紙を運ぶ馬車の御者が私の手紙を水の中に落としてしまったがために、その手紙の一部だけが読み取り可能であるような場合と似ています。私の手紙はこのような運命に出合わないことを望みはしますが、しかし昔の文書においては、そのような欠損はほとんど避けられません。そのような欠損にもかかわらず、歴史学はいくつかの事実を確証しえます。しかし、消え去った時代についての推測は、たとえほとんどの歴史家はその推測が仮定であることを承認したくなくとも、当然いつもある程度までは仮説的であります。

総括しますと、ある生起事象の頻度と全観察数の比は、その事象の生起確率と確実にその事象が生起するという確率、つまり、１との比に大体等しいということを確信することが出来ましょう。このような事実と論理の間の一致、可能性と実現との間の一致を、私は本当に素晴しいことだと思います。

ここに言及した二様の推論は、また場合に応じて使い分けることが出来ます。つまり、ある事象の生起頻度から信頼するに足る確率値を決め得ますし、他の事象の生起確率は、更に確率計算の規則にのっとって算出し得ます。そのことから、未だ生起していないある

事象の生起に関して結論を引き出し得ます。ところで、観察と思考は相互に補い助け合いながら、環境世界の認識を可能にしています。しかし、このことを最初に認識したのは自分である、と自惚れているのではありません。例えば、プラトンはすでにこのことについて認識をしていた、と私は確信しています。最近私は彼の≫ティマイオス (Timaios)≪を読み直し、その中に次のような驚くべき文章を見い出しました、≫存在が発生に通じるように、真実は信心に通じる≪。プラトンはこの幾らか謎めいた文章で、前に話題としました考えを表わそうとしたのだ、と私は確信しています。私はこの確信を、“ティマイオスは確実ではないが、ただ確からしい事柄について論じる”と、プラトンが記した文章から得たのであります。古代ギリシャには、まだプラトン以外に、プラトンの今言及した文章を理解した何人かの哲学者が居ました—例えば、カルネアデス (Carneades) —が、それ以来、この意味のはっきりしない文章の本当の意味は忘れ去られていました。数日前、私がティマイオスの中にこの文章を見い出しましたときは、本当に素晴しいギリシャ時代の立像を発掘し、それに付着した土を落して奇麗にして、昔のままの輝きを放つ大理石像を見つめる人のような気持ちになりました。

ローソクも本当に残り少なくなりました。私は貴殿の第二の御質問へお答えするのに、かなり拘わり過ぎたように思います。貴殿の第三の御質問が、暗闇を輝らすに相応しく、未だ暗闇に置かれたこのテーマに光を当てるに大切なものであるにもかかわらず、その御質問への答えは簡単であります。しかしながら、その御質問に対する答えを延期せねばなりませぬことを、切にお許し下さいませ。なぜならば、明朝、何はさて置きましてもこの御手紙を直ぐに、貴殿が今御逗留なさっています—カルカヴィ氏に聞くところによりますと—オルレアンに旅立つ、信頼の置ける男に言付けようと思いますので。貴殿の御質問を通して、貴殿がお蒔きになった種子が、如何にそんな短期間ですでに果実をもたらしたのか、を判断してもらうために、出来るだけ早くこの手紙を貴殿が受け取られんことを希望するのであります。望むらくは—この果実が未だ十分には熟してはいませんが—それでも貴殿にとってこの果実が、まずまずのものであることを期待しています。幾らか未だ渋いのですが、私の庭に実りましたリンゴを一籠御送り致します。このリンゴはトウルワーズに実るものよりは美味しいものではないことはよく承知しています。しかしながら、この僅かな贈り物は、プレズ・パスカルよりも、より公明にまた熱狂的に貴殿を尊敬している人は誰も居ない、ということを貴殿が確信されるのに役立ち得ると思います。

ブレス・パスカル

—第三書簡（オルレアンのピェール・フェルマー宛）—

パリ、1654年11月8日

親愛なるフェルマー殿

一昨夜、私は本当に不思議な夢を見ました。その夢で目を覚ましますと、汗はびっしょりで、心臓は高鳴っていました。その夢から私の注意を転じるために、「どんな条件のもとに確率計算で乗法定理は有効であるか」という貴殿の第三の御質問にお答えしたいと思います。トランプの束からカードを２度程連続して１枚ずつ抜き出す場合に、まず最初に抜

かれたカードが、２度目のカード抜きの前に、元のトランプの束に戻され、そして混ぜ直されるのか、または、最初に抜いたカードが元に戻されないのか、によってその乗法定理は、有効でもあり、無効でもあろうと貴殿は申されました。

例えば、トランプの束が16枚のカードから成り、その束にはスペード、ハート、クラブ、ダイヤの４種類があり、それぞれが、エース、キング、クイーン、ジャックから成っているとしますと、最初のカード抜きでキングを抜き取る確率は$\frac{1}{4}$であります。２度目にキングを抜き取る確率は、同様に$\frac{1}{4}$であります。即ち―後でまた確かめてみますように―最初に抜かれたカードが、２度目のカード抜きの前に元の束に戻されるか否かは無関係なのであります。最初に抜かれたカードが元に戻されない場合、２度ともキングを抜く確率は$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$ではなく、$\frac{1}{20}$であります。なぜならば、連続２回引くと、$4\cdot3=12$通りの異なる２枚のキング引きの可能性があり、連続２回引きでの可能な総数は$16\cdot15=240$通りであります。このことは、10月28日付の私の御手紙の中で言及しました乗法定理に、一見矛盾するような印象を受けます。しかし、それはただ矛盾するように見えるだけであります。この例題をもっと詳しく調べてみますと、ここでもまた、乗法定理が有効であることがはっきりするでありましょう。

もし、最初に１枚のキングを引き、それを２回目のカード引きの前に元に戻さないとしますと、２回目のカード引きに際しては、ただ15枚のカードがあり、その中に３枚のキングがあるだけであります。そこで、２回目に再びキングを引く確率は$\frac{3}{15}$であります。$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$でありますので、ここでもまた事実、乗法定理は有効であります。最初のカード引きでキングを引かなく、キング以外のカードが引かれる（そして、そのカードは元に戻さない）という仮定のもとでは、２回目のカード引きでキングを引く確率は$\frac{4}{15}$であります。そこで、最初のカード引きでキングを引かず、２回目のカード引きでキングが引かれる確率として、乗法定理の助けを借りて、$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{5}$を得ることになります。２度目にキングを引く確率は、最初のカード引きの結果はキングか、またはキングでないかであるので、$\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$であります。これは最初のカード引きで引かれたカードが２回目のカード引き前に元に戻されるとしたときと、丁度同じ大きさであります。しかし、この論証は最初に引かれたカードが、何であるのか、を確認されないときにだけ根拠のあることであります。しかし、もし最初の引いたカードを見て、それがキングでない場合には、２度目にキングを引く確率は$\frac{4}{15}$（$\frac{1}{4}$より大きい）であるのに対して、最初のカードがキングであることを確認しますと、２度目にキングを引く確率は$\frac{1}{5}$（$\frac{1}{4}$より小さい）であります。どうして確率は最初に引かれたカードを見たのか、見なかったのかということに左右されるのかと疑問が生じます。最初に引かれたカードは、何であるのかを人によって見られたのか、見られなかったのは知りえないわけです。言い換えますと、確率はトランプの束の構成の在り方だけに左右されるはずであるのに、どうして最初のカードが何であったのかの知識が、２度目のカード引きの確率に影響をもたらすのでありましょうか。もし最初に引いたカードを見ますと、16枚のカードのどれが、残りの15枚の中に存在しないのかを知る結果になり、その最初に引かれたカードが15枚の中に存在しないという事実は、当該の確率（２度目にキングを引く確率）に影響を与えます。なぜならば、２度目にキングを引く確率は、残り15枚の中に４枚のキングがあるのか、３枚のキングがあるのかに左右されるからであります。引かれたカードを見るというのは、実際には余り厳密な言い方ではありません。

なぜならば、最初に引いたカードがキングである（または、キングでない）という事実だけが重要なのであって、この事実についての知識は重要ではないのであります。もし２度目に引かれるカードだけに興味があるのであれば、２度目にキングが引かれる確率の計算においては、最初のカード引きで２つの可能性（つまり、キングを引くか、または、キング以外のカードを引くか）を考慮しなければなりませんし、その２通りの可能な結果の確率、つまり$\frac{1}{4}$と$\frac{3}{4}$を重みとして使用して、条件つき確率$\frac{1}{5}$と$\frac{4}{15}$の「重みづけられた平均値」を考えねばなりません。そこで、事実$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{15}=\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$を得ることになります。

この例は、一見易しそうな問題の処理には、大変な注意が必要であることを示しています。なぜならば、ほとんど全てのステップで色々の可能な場合が存在するからであります。乗法定理についての御質問に立戻るべく、その定理を一般的に、より正確に述べます。すると次のようになります。つまり、事象Ａと事象Ｂの両者が生起する確率は、事象Ａの生起確率と事象Ｂの生起確率との積に等しい。その際、事象Ｂが生起する確率は、事象Ａが生起するという条件のもとに計算されねばなりません。このような値を私は、条件Ａのもとにおける Ｂの“条件つき確率”と呼びます。

ここに私は条件つき確率という新しい概念を導入したかのように見えますが、しかしこの概念は、原則的には確率という概念と異なりはしません。ある条件のもとに、その事象が生起したり、しなかったりするのであり、その事象の生起確率は、ある条件にいつも左右されています。例えば、サイコロ投げで、６の目が出る確率は$\frac{1}{6}$である、と言うときには、なかんずく、そのサイコロは規則的な良いサイコロである、という暗黙の了解を私達は仮定しているのであります。前に言及しましたトランプの束から１枚のキングを引く確率が$\frac{1}{4}$である、と述べる場合には、そのトランプの束は16枚あり、それには４枚のキングを含んでいて、良く混ぜられていて、カードを引く場合にはカードの裏側だけが見える状態で引くのである、と仮定しているのであります。もし、条件が変われば、一般にまた、その確率も変ります。結局のところ、全ての確率は、条件づけられている条件つき確率なのであります。しかし、その条件がはっきりと判っていて、変らないのであれば、この条件については言及はしません。しかし、条件が変れば、またそのことが考慮されなければなりません。≫条件つき確率≪という表現は、丁度、人間は本来死ぬべき運命にあることははっきりしているのに≫死ぬべき運命にある人間≪という表現のように、冗長なのであります。しかしながら、誤解を避けるために、条件が変化するときは、いつも条件つき確率とはっきり言う方が好都合であります。

しかし、事象Ａが生起したという条件のもとに事象Ｂの生起する確率は、この条件なしに事象Ｂの生起する確率に等しい、ということが起ります。この場合、事象Ａと事象Ｂは互いに独立であると言います。なぜならば、事象Ｂの生起確率は、事象Ａが生起したのか、しなかったのか、または、事象Ａの生起、または不生起が考慮されたのか、そうでないのかにも無関係でありますから。事象Ａと事象Ｂが互いに独立であれば、条件つき確率の概念を使用することなしに、これらの事象に対して乗法定理が適用されます。つまり、事象Ａと事象Ｂが共に生起する確率は、それぞれの個々の事象の生起確率の積に等しいことは、問題なく主張しえます。例えば、Ａは前に述べたカードの束から引かれた１枚のカードがスペードであるという事象であり、Ｂは引かれたカードがキングであるという事象を意味しているとしましょう。この場合、両事象は同一カードに関係してはいますが、しかし両

事象は互いに独立であります。なぜならば、16枚のカードには４枚のキングがあり、その４枚のカードの中のスペードはキングであり、更には残り12枚のカードには３枚のキングがありますから。そこでは、事象Ｂの生起確率は$\frac{1}{4}$であり、事象Ａが生起したという条件のもとでも、事象Ａが生起しなかったという条件のもとでも、また事象Ａのことが全く考慮されなかったときでさえも、$\frac{1}{4}$であります。

11月８日　夕方

今朝書きましたものを通して読み直してみますと、貴殿の御質問に対する私の返答には新たな疑問が生じてくるということに気づきました。一体、カードが≫よく混ぜられている≪とは何を意味しているのだろうかと、よくよく考えてみました。上手にトランプゲームをする人―例えば、シェバリエル・ド・メレ氏―に私がそのことを質問してみると仮定しますと、その人は、「よく混ぜられているということは、普段のカード繰りを十分に行い、ある偶然にしか生起しないようなカードの配列を意図的に作り出そうとするようなごまかしをしないで、カードを十分に長い時間混ぜたことを意味している」ときっぱり答えるでしょう。しかし、私は単なるカードの配列からだけから（如何にカードが混ぜられたかを知ることなしで）そのカードが本当によく混ぜられたものか、そうでないのかを決められえるのだろうか、と問いかけたのであります。最初は、この問いがどんなにたちの悪いものであるか判りません。シェバリエル氏がこの問いにどう答えるか、本当に私には興味津津であります。もしそこで彼がカードの配列だけから、よく混ぜられたものであるかどうかが判ると答えるとしますと、私は彼に、「よく混ぜられた後にハートのクィーンが一番上にある確率はいくらか」と質問するでありましょう。すると彼ははっきりと、「よく混ぜた後では16枚のカードの各々が一番上にある確率は同じで、つまり確率$\frac{1}{16}$である」と答えるでしょう。この考え方をもっと押し進めていますと、カードがよく混ぜられた後では、可能なカード配列の各々は同じ確率を持つに違いない、という認識をえるに到ります。もしシェバリエル氏にその判断が可能であっても、カードが本当によく混ぜられているのか否かをどうしてカードの配列によって決定されえるのでしょうか。一体どんな配列を私達が手にしたときに、よく混ぜられた場合に手にすることになる配列に等しいのでしょうか。もしカードの配列からそのカードがよく混ぜられたのかどうか決められない場合には、一体よく混ぜられたということはどんな意味をもっているのでしょうか。「一度だけのカード混ぜによる結果からは、そのカード混ぜがごまかしであるのか否かは決められない」とシェバリエル氏は答えるでしょう。しかし、彼が何度も期待していたように良いカードを自分に配るとすれば、それは彼がごまかしをやっている１つの証拠であります。しかし、私は更にそこで、もしごまかしをしない人がカードを配ると、全ての可能な配列は大体同じように生起すると考えるのかどうか、をシェバリエル氏に問い返してみるでしょう。何も知らないシェバリエル氏がその問いに肯定的であるとすれば、彼はすでに落し穴に落ちたことになります。なぜならば、16枚のカード全ての配列可能な数は、１から16までの数の積に等しく、その数は大変に大きく、ある人が日夜中断することなくカードを切って、その１回のカード切りにたったの１分を必要とするとしても、約39億年の間カードを切り続けねばならず、それでもやっと全ての可能な配列が１度ずつ現われる程の数でありますから。

それ故、実際にはこのような方法では、カード切りの正当性を検証しえません。私は自分で簡単なカード切りの器械を考案しました。カードが平らな斜面に沿って下に落ちて行くようにして下の箱に落とさせ、その後ゼンマイ仕掛けでカードの入った箱を押し上げ、そのカードを再び斜面の上に落とさせる、というような器械です。この器械で大体毎分10回位、カードを混ぜることが出来ます。しかし、全ての配列が現われるまでには、それでもまだ大体400万年を必要とします。52枚のトランプカードでは、どれ程の配列が可能であるかを計算しょうと思いましたが、眩暈を起してしまいました。

私達はよく混ぜたことの正当性を如何に検証しえるかという難しい問いを無視して、実際に全ての可能な配列を、全て同じ確率で実現させえる器械（またはそのように訓練のできた信頼するに足るゲーム者）が準備されていると仮定しましょう。今、そのような器械（またはそのようなゲーム者）が16枚のカードを混ぜると、20兆より多い可能な配列の中の１つの配列が実現します。それが何を意味しているかを一度考えてみて下さい。目の前に１つの事象（配列）が生じると、その確率は0.00000000000005であるということです。私がこのことを考えるようになるまでは、このような小さな確率で生起する事象が実際に生起することは不可能であろうと確信していました。カード混ぜの器械の例が示しますように、この種の言述にはよほど注意をしなければなりません。そうしますと、生起確率が大変小さいある事象の生起は、現実的には不可能なこととして、また、生起確率が１に近い事象の生起は現実的にはほぼ確実であると、みなされるのは大体どんな意味において正しいのでありましょうか。この問いはそんなに難しくないように私は思います。それは、私があらかじめ或る決った配列を選び出し、そしてそれを書き取り、その後にカードを切るというような場合に、その書き取られた配列が、カード切りの結果として実際に生起する配列よりも生起しにくくはないにもかかわらず、その前もって選んだ配列が生起するということは、しかしながら現実にはほとんどないということであります。

私が確率について考え始めましたとき、私には最初全てのことが簡単で明白なことのように思えました。ところが今、私は大きな思い違いをしていた、という考えを持っに到りました。私が真実を捕えたと思う時には、いつでもその真実は私の手から滑り出てしまうのであります。ほとんど毎回絶壁のようなものが、私の前に待ち受けていました。多分、この不安が昨夜あれ程に私を興奮させたあの夢の中に顔を出したのであります。私は夢の中で、洞穴の中に居て、暗闇の中であっちこっち危かしく歩きまわって出口を捜していました。僅かな光が透き間から見える方向に近づこうと私は努力しました。私の道は大きな岩によって防げられてはいましたが、とうとうその岩を迂回することに成功し、洞穴からの出口をはっきりと見い出しました。そこで私は方向を定めて出口の方に一歩踏み出しましたが、そこで突然肩をつかまれ、突き返されるような感じを持ちました。間違いなく私の肩が突き出た岩の部分に当ったのだと私は考えました。なぜなら、その洞穴には私以外に誰も居ないことを知っていましたから。そこでもう一度その出口に向って前進しようと思いましたが、しかし今度は以前よりも注意深くなり、壁に沿って壁を手で確かめつつ、また足元を確認しつつ進みました。すると私の足元に暗い絶壁が口を開けていましたので、急いで私は飛びさがりました。もし以前に何か（または誰か）が私を突き戻すようなことがなかったのであれば、間違いなく落ちていたでありましょう。最初、私はどんな危険に直面しているのかを全く理解していませんでした。最初は興味から、ポッカリと口を開け

た空間に石を投げ込み、石が水に落ちるまでの僅かの時間でその絶壁の深さを計るために、私は数を数え始めました。5まで数えてもまだ何の音も聞えず、自分の置かれた立場を理解しようとしました。私は10まで、20までも数えましたが、まだ何の音も聞えませんでした。恐しさのあまり歯をカツカツ鳴らして、とうとう夢から覚めるまでその後ずっと数を数え続けていました。

当然のこと、夢から覚めたあとは、再び寝ることが出来ず、私の見た恐しい夢の記憶から逃れるために、まだ夜も明けやらぬのに、この手紙を書き始めました。

今は、私の見た夢について平静に考え直してみる状態にあります。しかし、その夢から何を汲み取れば良いのか、私には分りません。≫はっきりした理解が定まらないような問題に係わっている場合には、睡眠中にも大体そのことに係わっているように思える≪と、ルクレチィオスが述べているように、私の手から何度も何度もこぼれ出る何か秘密めいた確率という概念が、夢幻となって現われたのか、または、その夢は他の意味を持っているのでありましょうか。どんな危険が私を待ち受けているというのでしょうか。また、どんな未知なる手が私を破滅から救ってくれたというのでしょうか。一体どんな理由から私達は夢を見るのでしょうか。夢は一体どんな意味を持っているのでしょうか、または意味なんかはないのでしようか。丁度、カードをするゲーム者がカードを切るように、夢の中で休息せる私の脳は、脳の中にある色々の観念を混ぜ合わせて、その結果これらの観念のある配列が成立し、丁度カードの配列の場合において、ある任意の配列がほとんど何の特別の意味を所有していないように、この任意の成立した観念の配列に何か隠れた意味を見い出そうとしてもうまくいかないことが私にはよく分ります。偶然という概念は、1000年余りの長きに渡って、迷信的な観念を着せられていました。そのことが、偶然性についての科学的研究を、私達人間にさせることを防げていた原因であったのです。偶然性ということについて申せば、私は迷信的などうにもならない束縛から解放されたように思います。しかし、夢に関して申しますと、論理的にも何ら確かでない推論に基づいた感情から脱け出しえず、それ故に私には夢はどうにでも解釈されるというようなものであります。私はまだもって、私の夢について貴殿を煩わしていますことをお許し下さいませ。私はこのことを恥てはいますが、本当に素直にこの夢についての私の考えを貴殿にお伝えすることに満足を感じています。私の考えをよく御理解下さる貴殿が、また今の私の心の状態に対して一たとえ仮りに、多少は否定的ではありましても一御理解を示されますことを希望致します。精神的にそんなに親密な関係にない人達には、多分に何らかの嫌気を起こさせてしまうのでしようが、しかし貴殿は一そうあれと私は希望していますが一この私の素直さを、私の貴殿への敬慕の証として理解して下さると私は考えています。また。この御手紙から、どんなに私が貴殿を尊敬し、貴殿と友情関係を持ちえることの名誉を、どんなに私が意識しているかを、理解していただけるものと信じています。

ブレス・パスカル