高松大学紀要,27.378～388

多目的離散計画問題とその対話型意思決定

疋　田　光　伯

1．　はじめに

互いに競合する複数個の目的関数を，与えられた制約式のもとで，最大（最小）化する問題は多目的計画問題（multiobjective programming problem）と呼ばれ，経営科学，情報科学等の多くの分野で重要な問題が含まれる。一般に，多目的計画問題のすべての目的関数を同時に最大化する解は存在しない。その代わりに，ある目的関数の値を改善するためには，少なくとも他の１つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解の概念としてパレート最適解（pareto optimal solution）が定義されている。パレート最適解は単一解ではなく普通は無限個の点集合である。しかし，実用上の問題では単一解または適当な大きさの解集合を求めなければならない。従来，これらのパレート最適解の中から特定の解あるいは部分集合を選択するために，意思決定者の価値観に最も合うような解（選好最適解）を求める種々の解法が提案されている[1)]。

また，多目的計画問題の複数個の目的関数について意思決定者が事前に目標値を設定することができる場合には，目標値にできるだけ近づけるように実行可能解を求めることが考えられた。この問題は目標計画法（goal programming）[2)]と呼ばれ，経営計画等多くの分野で応用されている。さらに，最近では多目的計画問題に関して，問題の設定(制約式と目的関数に含まれるパラメータの決定)時に含まれるあいまい性と意思決定者があいまいな目標を持つことを考慮した対話型ファジィ満足化手法が提案されている[3)]。

このように様々な多目的計画問題が定義され，その解法が提案されてきたが，そのほとんどが変数はすべて連続値をとるものであった。本論文では変数がすべて離散値をとる多目的計画問題（多目的離散計画問題）を実用的に取り扱うための新しい問題の定式化とそれを解くためのアルゴリズムを提案する。この問題は標的問題（target problem）と名づけられ，変数がすべて連続値をとる従来の多目的計画問題とは異なり，離散変数の取り扱いが容易になるように工夫されている。標的問題を解くためのアルゴリズムは主にモジュラアプローチ[4)]の概念を利用して構築され，与えられた問題のパレート最適解を求めることができる。モジュラアプローチは，単一目的の大規模な離散最適化問題を効率的に解く

ためのアルゴリズム設計法であり，これを用いることにより大規模な多目的離散計画問題を解くことが可能となる。例題を解くことによって本アルゴリズムの有用性を明らかにする。さらに，提案された最適化アルゴリズムを多目的離散計画問題に対する対話型意思決定に適用する。計算実験によって，一般には無限個のパレート最適解の中から意思決定者が選好最適解を比較的簡単に求めることができることを示す。

2．問題の定式化

一般に，多目的計画問題は次のように定義される。

$$(\mathrm{MP}):\quad \max\quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))^T$$

$$\text{s.t.}\quad x \in X = \left\{ x \in R^n \mid g(x) \leqq 0 \right\}$$

ここで，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$は n 次元実数変数ベクトル，$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))^T$はk次元ベクトル関数，$g(x) = (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))^T$は m 次元ベクトル制約関数である。このように従来の多目的計画問題は，m 個の制約条件のもとで k 個の目的関数を同時に最大にするn次元実数変数ベクトルを求める問題である。

提案する問題は標的問題（target problem）と名づけられ，変数がすべて離散値をとる多目的計画問題として次のように定式化される。

$$(\mathrm{TP}):\quad \text{target}\quad f(x) \geqq f^{opt} - \varepsilon$$

$$\text{s.t.}\quad g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \leqq 0$$

ここで，$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$は n 次元整数変数ベクトル，$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^T$は k 次元ベクトル標的関数(target function)，$f^{opt} = (f_1^{opt}, \ldots, f_k^{opt})^T$はそれぞれの標的関数を単独で使用した単一目的の問題の最適値ベクトル，$\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)^T$は標的定数ベクトル，$g(x)$ は制約関数である。すなわち，標的問題とは各標的関数の最適値に幅を持たせて，すべての標的関数がその範囲に入る実行可能解を列挙する問題である。後述の標的問題を解くためのアルゴリズムではεを調整することによって任意の大きさのパレート最適解を求めることができる。意思決定者はこのパレート最適解の中から自己の選好構造に従って特定の解を選択することになる。

3．モジュラアプローチの概要

モジュラアプローチは，動的計画法（Dynamic Programming）と同様にボトムアップ的な手法である。まず，与えられた離散最適化問題に対して対応した最適化システムを考え，次の(1)と(2)の操作を繰り返すことにより原問題を解く。

(1) システムに対して深測操作を適用し決定空間を縮小する．

(2) システム内の複数のモジュールを単一のモジュールに統合することによってモジュール数を減らす。

上記の(1)の深測操作では，分枝限定法と同様に，優越テスト，限界値テスト，実行可能性テストの３テストを用いている。但し，問題が多目的の場合には優越テストは使用できない。(2)の二つのモジュールを一つのモジュールに統合するとは，二つの変数の解空間の直積を求め，その直積空間と対応する解空間を持つ新しい変数（モジュール）を導入し，もとの２変数を消去することである。動的計画法におけるモジュールの統合順序は関数方程式によって固定されたものであるが，モジュラアプローチにおいては統合すべきモジュールの選定政策を柔軟に決定できる。

3.1 統合の方法

モジュラアプローチは次に示す４種類の統合方法を柔軟に選択できる。本計算実験では代替案数が常に平均的な統合が行われると考えられる統合方法（２）を用いた。

(1) 代替案数最小のモジュール二つ

(2) 代替案数最小と最大のモジュール二つ

(3) 代替案数最大のモジュール二つ

(4) モジュール番号順（DPに相当）

3.2 深測操作（fathoming）

モジュラアプローチは次の３つの深測操作によって決定空間を縮小する．

(1) 実行可能性操作（feasibility）

(2) 限界値操作（bounding）

(3) 優越性操作（dominance）

これらは，動的計画法及び分枝限定法（Branch and Bound）で用いられているものと同じ手法である。

3.3　深測すべきモジュールの選択方法

モジュラアプローチでは深測すべきモジュールの選択も下記のように柔軟に決定できる。本計算実験では，統合レベル $\ell=1$ のとき及び暫定解（近似解）が更新されたときは選択方法(3)を，またその他の場合は選択方法(2)を用いた。

(1)　代替案数最大のモジュール

(2)　最も最近統合されたモジュール

(3)　全てのモジュール

(4)　適当な統合レベル毎に全てのモジュール

(5)　代替案数がある基準値を越えたモジュール

モジュラアプローチを非線形ナップザック問題に適用した論文[5]の中で,計算時間と必要記憶容量は変数の統合政策に強く依存すること,そして変数の統合政策をうまく選べば実際的な問題に対してモジュラアプロチが有効であることが示されている。また,モジュラアプローチを非線形計画問題に適用した論文[6]では，非線形計画問題を離散最適化問題に変換した後，モジュラアプローチを適用することによって，原問題を十分に解き得ることが報告されている。

4．アルゴリズム

標的問題TPを解くためのアルゴリズムはモジュラアプローチを中心として構築される。すなわち，まず，標的問題の１番目の標的関数 $f_1(x)$ のみを用いた単一目標の問題 TP^1 をモジュラアプローチによって解き,その解集合 X^1 を得る。次に,この解集合 X^1 の中で $f_1(x)$ 以外の標的関数 $f_2(x),\ldots,f_k(x)$ がすべてそれぞれの標的範囲に入る解を抽出し,その解集合 X^{sol} を求める。さらに,解集合 X^{sol} に対して標的関数間の優越操作を行い,縮小された解集合 X^{pos} を得る。X^{pos} はTPのパレート最適解である。

FUNCTION　Main（ ）

INPUT　TP, Fm, CIM

BEGIN

　$X^1 \Leftarrow$ ModularApproach　(TP^1, Fm, CIM)；

　$X^{sol} = \left\{ x \in X^1 : f_j(x) \geq f^{opt}_j - \varepsilon_j \ (j=2,\ldots,k) \right\}$；

　$X^{pos} \Leftarrow$ Dominance　(X^{sol})；

```
OUTPUT   Pareto Optimal Solution X^pos
END

FUNCTION   ModularApproach (P^(0), Fm, CIM) ;
BEGIN
  r ← 0 ;
  WHILE  r ≦ n  DO
    r ← r + 1 ;
    {A^(r)_M(r−1)} ⇐ Fathom (r, P^(r−1), Fm) ;

    {C^(r)} ⇐ Choice (M^(r−1), A^(r)_M(r−1), CIM) ;

    {P^(r)} ⇐ Integrate (C^(r), P^(r-1), A^(r)_M(r−1)) ;
  ENDWHILE
RETURN   Solution of P^(0)
END
```

但し,

Fm	深測操作をどのモジュールに対して実施するかを決めるための政策
CIM	次に統合すべきモジュールを選定するための政策
TP^1	標的問題TPにおいて標的関数が$f_1(x)$のみの単一目標である問題
X^1	TP^1の解集合
r	問題の更新レベル
$P^{(r)}$	レベルrの問題
$M^{(r-1)}$	レベル(r－1)のモジュールの番号集合
$C^{(r)}$	統合政策CIMによって,レベル(r－1)のモジュール番号集合から選定されたモジュール番号部分集合
$A^{(r)}_{M(r-1)}$	$\left\{A^{(r)}_{m} : m \in M^{(r-1)}\right\}$
$A^{(r)}_{m}$	レベルrにおけるモジュールmに対する代替案集合
Fathom	政策Fmによる深測操作を行い,関数のリターンとして縮小された決定

	空間を戻す
Choice	モジュール集合 $M^{(r-1)}$ から統合政策 CIM を用いて次に統合すべきモジュールを選定する
Integrate	選定されたモジュール集合 $C^{(r)}$ を単一のモジュールに統合し，次のレベルの問題 $P^{(r)}$ をリターンとする
Dominance	優越操作を行い，関数のリターンとして縮小された解集合を戻す

5．例　題

本論文で提案したアルゴリズムを用いて，次に示す非線形ナップザック型の例題を解く。この例題の標的関数と制約関数の各モジュールにおける代替案の値を表1および表2に示す。

（例題）　非線形ナップザック型の標的問題

$$\text{terget}\quad f(x) = \sum_{i \in I} f_{i,j}(x_i) \geqq \text{target}_j, \quad j=1,2,3$$

$$\text{s.t.}\quad g(x) = \sum_{i \in I} g_i(x_i) \leqq b$$

$$I = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$
$$x_i = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad (i \in I)$$
$$\text{terget}_1 = 549.9,\ \text{terget}_2 = 329.0,\ \text{terget}_3 = 463.0$$
$$b = 430.0$$

本アルゴリズムを例題に適用した結果，次のように各段階での解集合 X^1, X^{sol} が生成され，最終的にパレート最適解 X^{pos} を得る。

$$X^1 = \{(2,6,4,6,7,4,1),\ (2,6,4,7,7,4,1),\ (2,5,4,7,7,4,2),\ (7,5,4,6,2,4,1),\ (2,5,6,7,7,4,1)\}$$

$$X^{sol} = \{(2,6,4,7,7,4,1),\ (2,5,4,7,7,4,2),\ (2,5,6,7,7,4,1)\}$$

$$X^{pos} = \{(2,6,4,7,7,4,1),\ (2,5,6,7,7,4,1)\}$$

表1　標的関数の各モジュールにおける代替案の値

$f_{i,j}(x_i)$		x_i						
j	i	1	2	3	4	5	6	7
1	1	10	34	38	46	75	107	136
	2	25	27	40	70	91	112	124
	3	16	24	55	84	97	101	104
	4	11	30	39	59	79	107	110
	5	30	51	63	68	83	114	135
	6	8	24	40	67	69	76	78
	7	14	30	52	59	60	86	88
2	1	7	10	27	55	59	76	83
	2	3	8	30	34	40	57	99
	3	12	14	19	36	67	85	110
	4	2	5	24	45	57	68	130
	5	21	35	40	46	75	76	88
	6	8	16	34	49	59	85	90
	7	19	30	64	76	79	95	121
3	1	6	9	26	39	53	65	105
	2	12	18	35	40	68	94	110
	3	27	34	45	55	79	101	126
	4	14	32	38	63	75	96	145
	5	8	16	43	78	81	113	139
	6	14	25	30	48	60	95	102
	7	9	13	28	61	86	88	95

表2　制約関数の各モジュールにおける代替案の値

$g_i(x_i)$	x_i						
i	1	2	3	4	5	6	7
1	5	19	34	63	94	113	142
2	18	49	80	82	89	115	130
3	8	24	36	40	64	68	85
4	11	26	35	45	57	65	67
5	3	19	36	46	67	99	112
6	28	41	65	71	77	85	110
7	4	30	46	62	94	125	138

6. 計算実験

本アルゴリズムを実用規模の多目的非線形ナップザック問題に適用した結果を表3，表4に示す。各問題に対して第1番目の標的関数の標的値をパラメータとして，パレート最適解の個数，計算時間，最適化過程におけるモジュールの最大代替案の個数を求めた。問題の規模は問題1，問題2をそれぞれ（k＝3，n＝100，na＝10）および（k＝7，n＝30，na＝10）とした。これらの結果より，本アルゴリズムが大規模な多目的離散計画問題に適用できることが分かった。また，標的値を変化させることによって適当な大きさのパレート最適解集合を得ることができた。この結果から，本アルゴリズムを対話形式で繰り返し適用することによって，一般には無限個のパレート最適解の中から選好最適解を比較的簡単に求め得ることが示された。なお，計算実験にはワークステーション（CPU R4000）を用いた。

表3　問題1の計算結果（k＝7，n＝30，na＝10）

標的値	パレート最適解	計算時間(s)	最大代替案数
5649	20	0.38	245
5648	847	26.25	13679
5647	－－	－－	－－

表4　問題2の計算結果（k＝7，n＝30，na＝10）

標的値	パレート最適解	計算時間(s)	最大代替案数
1732	10	0.06	281
1731	66	0.62	1974
1730	235	9.25	10101
1729	899	65.80	22271
1728	－－	－－	－－

7. 多目的離散計画問題の対話型意思決定

本論文で提案した最適化アルゴリズムを用いて，多目的離散計画問題の選好最適解を対話形式で求める手順の一例を示す。

選好最適解を求める手順

（手順1）各標的関数を単一で使用したときの問題（単一目標単一制約）をモジュラアプローチで解き，f^{opt}を得る。また，選好最適解を決定するためのパレート最適解集合の大きさβを定める。

（手順2）意思決定者はf^{opt}を参考にして，各標的関数に対する標的値を定める。

（手順3）手順2で定義された標的問題を本論文で提案したアルゴリズムで解き，求められたパレート最適解の大きさを表示する。パレート最適解集合の大きさがβ以内になるまで手順2，手順3を繰り返す。

（手順4）意思決定者は，縮小されたパレート最適解集合の中から自己の選好構造（例えば各標的関数の重要度）に基づいて選好最適解を決定する。

8. おわりに

本論文では変数がすべて離散値をとる多目的計画問題（多目的離散計画問題）を実用的に取り扱うための新しい問題（標的問題）の定式化とそれを解くためのアルゴリズムを提案した。さらに，提案された最適化アルゴリズムを多目的離散計画問題に対する対話型意思決定に適用し，一般には無限個のパレート最適解の中から比較的簡単に意思決定者が自分の価値観に合う解を求めることができることを明らかにした。今後の課題としては，より実用的な意思決定システムの構築が残されている。

参考文献

[1] 清水清孝：「多目的と競争の理論」，共立出版（1982）.

[2] 福川忠昭，山口俊和：「目標計画法とその発展」，日本経営工学会誌，Vol. 36，No. 1，pp. 7－19（1985）.

[3] 坂和正敏：「多目的線形計画問題に対する対話型ファジィ意思決定手法とその応用」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J 65－A，No. 11，pp. 1182－1189（1982）.

[4] 仲川勇二：「離散最適化問題のための新解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J 73－A，No. 3，pp. 550－556（1990）.

[5] 仲川勇二，疋田光伯，岩崎彰典：「多重選択ナップザック問題の高速厳密解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol. J 75－A，No. 11，pp. 1752－1754（1992）.

[6] 疋田光伯，岩崎彰典，仲川勇二：「モジュラ法の非線形計画問題への適用」，電子情

報通信学会論文誌，Vol. J 76－A，No. 1，pp. 64－67（1993）.

[7] 岩崎彰典，疋田光伯，仲川勇二，成久洋之：” An Application of Modular Approach to Separable Nonlinear Programming Problem”，京都大学数理解析研究所講究録，No. 864，pp. 83－90（1994）.

[8] 疋田光伯，仲川勇二，宮地功：「多目的離散最適化問題を解くためのアルゴリズム」，京都大学数理解析研究所講究録，No. 889，pp. 125－132（1995）.

[9] 疋田光伯，宮下文彬，仲川勇二，伊藤俊秀：「多目的離散最適化アルゴリズムの評価」，京都大学数理解析研究所講究録掲載予定（1997）.