

改良代理制約法の金融工学への応用

疋 田 光 伯・仲 川 勇 二*

Using an Improved Surrogate Constraints Method to Financial Engineering

Mitsunori HIKITA Yuji NAKAGAWA

(Abstract)

This paper reports that we have succeeded in producing index-plus-alpha portfolios, that is a portfolio of stocks that would have produced a return that is α higher than a given index. The portfolio has stable ex-post facto performance, that is they are predicted to closely track a market index with an extra amount of profit. The period of time used to test the method was between 1996-1999 when active fund managers were unable to create portfolios that would exceed the market index. In order to obtain good ex-post performance of an index-plus-alpha fund, an improved surrogate constraints method is applied to data from the Tokyo stock market (NIKKEI 225) from April 1994 to March 1999.

Key words : multidimensional nonlinear knapsack problem, surrogate constraints method, index-plus-alpha fund

1. まえがき

単一目的で単一制約の非線形ナップザック問題を厳密に解くアルゴリズムとして、分枝限定法や動的計画法を改良したモジュラー法が1990年に仲川[2]、[18]によって提案された。モジュラー法は動的計画法と同様にボトムアップ的な手法であるが、実行可能性操作、限界値操作、優越操作の3つの深測操作を行うモジュールの選択と、モジュールの統合方法の選択を実施することで、従来は解くことが困難であった様々な種類の大規模な問題を厳密に解くことが可能になった。

* 関西大学総合情報学部

また、複数の制約条件をもつ非線形ナップザック問題（多次元非線形ナップザック問題）は、厳密に解くことが極めて難しい問題として知られている。問題が難しすぎるためこの問題の厳密解法に関する研究はほとんど行われていないのが現状であった。多次元非線形ナップザック問題を解くアルゴリズムとして、1968 年に Glover[11]によって代理制約法が提案された。この方法は複数の制約条件式をもつ原問題を、代理乗数を用いて単一制約の代理問題に変換し、この代理問題を解くことで原問題の最適解を求める方法である。代理乗数を変化させ、最適な代理乗数を見つけてその代理問題を解くことによって原問題を解く問題は、代理双対問題と呼ばれる。最適な代理乗数は、Dyer[12]、仲川ら[1]、[13]のアルゴリズム（代理制約法）を用いて求めることができる。さらに代理乗数によって生成される代理問題は単一制約であるので、上述のモジュラー法を用いて効率よく解くことができる。しかし、多くの場合、原問題と代理双対問題の間には代理双対ギャップ（surrogate duality gap）が存在し、代理双対問題の最適解は原問題の最適解とはならない[14]。

仲川[17]、[21]によって代理双対ギャップを閉じ、原問題の厳密解を求める改良代理制約法（ISC 法）が 2004 年に提案された。ISC 法は目的関数の限界値として設定した標的値よりも良い目的関数値を与える解を列挙する問題（標的問題）[3]～[6]、[19]、[20]に対してモジュラー法を適用して解く方法である。ISC法を用いることにより、標的値よりも良い目的関数値を与える解がすべて列挙されるので、代理双対ギャップが閉じられ原問題の最適解を厳密に解くことができる。この解法により、3 制約条件式をもち 1000 変数で各変数が 20 個の代替項目をもつ問題や 8 制約で 500 変数 50 代替項目の問題のように、従来は解くことが困難であった極めて大規模な多次元非線形ナップザック問題の厳密解を求めることが可能になった。

1992 年に正田ら[15]は、変数分離形問題の中に非分離関数が含まれているときに、その関数を一次近似することで分離形に変換して解くことを提案した。仲川ら[8]、[9]は、この方法を用いて、ISC 法を金融工学分野の従来解くことが極めて難しいと考えられていた最適化問題（インデックス・ファンド最適化問題（非凸二次計画問題））に適用し、計算実験によりその有効性を明らかにした。

本論文では、インデックス・ファンド最適化問題よりもさらに解くことが難しいとされているインデックス・プラス・アルファ・ファンド最適化問題に ISC 法を適用する。計算実験により、ISC 法を用いることにより有効なファンドを構成できることが確かめられ

たので報告する。

2. インデックス・ファンド

日経平均株価指数や TOPIX などの市場インデックスと同じ値動きをするように運用することを目標とする投資信託をインデックス・ファンドという。市場インデックスに追従するようなファンド（インデックス・ファンド）を構成し運用すれば、アクティブファンドのように短期的に大きなリターンが得られることは期待できないが、長期的なパフォーマンスにおいては安定性があり優れている。そのため、従来から年金運用等に利用されているが、リスクが少ないことから最近では個人投資家にも人気がある。

市場インデックスとインデックス・ファンドとの乖離幅はトラッキングエラーと呼ばれ、この値が小さいインデックス・ファンドほど市場インデックスとの追従精度が高く、インデックス・ファンドとしての格付けも高くなる。一般的に、インデックス・ファンドはトラッキングエラー、ファンドの経費率、取引コスト、リスクなどで評価されるためである。従来は、市場インデックスを構成する全銘柄から選択された少数銘柄で市場インデックスと連動するようにファンドが組まれていた（サンプリング法）が、トラッキングエラーが大きいことが問題となっていた。そこで、最近では組み入れ銘柄の選択を行わずに市場インデックスを構成するすべての銘柄でインデックス・ファンドを組む方法が広く用いられている（完全法）。しかし、取り扱う銘柄数が多くなればなるほど取引コストが大きくなること、非効率な投資先にも投資してしまうことを考えれば、サンプリング法でトラッキングエラーが小さいインデックス・ファンドが実現できるならば、市場インデックスを構成するすべての銘柄をファンドに組み入れる完全法よりも有利である。

3. インデックス・ファンドの最適化

インデックス・ファンド最適化問題[7]は、田畑、竹田[16]によって種類の銘柄からなる市場インデックスに追従する種類の銘柄を選択する問題を 0-1 変数の二次計画問題として定式化された。ここで取り上げる問題は、日経 225 に含まれる全銘柄の中から 50 銘柄を選択し、選択した各銘柄の組み入れ比率を決定してファンドを組み、日経 225 と同じ値動きを実現するという問題である。225 銘柄の中から 50 銘柄を選択する組み合わせの数は、

3.68×10^{50} と膨大な数になる上、それぞれの銘柄の組み入れ比率をも決定しなければならず、厳密に解くことはもとより近似的に最適解を求めることでさえ非常に困難である。この最適化問題に ISC 法を適用するために、論文[9]では問題が離散関数をもつ非凸計画問題として次のように定式化された。すなわち、目標となる市場平均（日経 225）の指数を R_0 とし、選択された q 種類の銘柄からなるインデックス・ファンドの収益率を R で表せば

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} \quad S = E[(R_0 - R)^2] \\
 & = \mu_0^2 + \sigma_{00} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mu_i \mu_j + \sigma_{ij}) \xi_i \xi_j - 2 \sum_{i=1}^n (\mu_0 \mu_i + \sigma_{0i}) \xi_i \\
 & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^n \xi_i = 1 \\
 & \quad \sum_{i=1}^n z_i(\xi_i) = q \\
 & \quad \xi_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

ただし、 μ_i は銘柄 i の平均、 σ_{ij} は銘柄 i, j の共分散で、

$$z_i(\xi_i) = \begin{cases} 0 & (\xi_i = 0) \\ 1 & (\xi_i > 0) \end{cases}$$

である。計算実験ではデータが全てそろっている 95 年 4 月から 98 年 3 月の 3 カ年の日経 225 の実データを使用した。表 1 は最適化問題に ISC 法を適用して解いて得られた 50 銘柄を示したものである。最適化問題を解くことによって生成されたインデックス・ファンドと日経 225 の収益率の変化を図 1 に示す。生成されたインデックス・ファンドは日経 225 とほぼ同じ収益率となっている。図 2 は、日経 225 と最適化問題を解いて得られたインデックス・ファンドの値動きの乖離（トラッキングエラー）を示したものである。得られたファンドは、日経 225 に対して ± 0.015 の範囲で連動しており、選択した 50 の銘柄で日経 225 にほぼ完全に追従するインデックス・ファンドを組むことが可能であることを示している。

表1 最適なインデックス・ファンド

極洋	住友石炭	鉄建建設	東亜建設工業	森永製菓
0.01413017	0.03325424	0.01586052	0.00306136	0.0377327
アサヒビール	富士紡績	日東紡	協和発酵	武田薬品工業
0.02819062	0.00937142	0.02675626	0.0107222	0.04046549
三菱石油	旭硝子	太平洋セメント	東陶機器	神戸製鋼所
0.0019546	0.04945412	0.00530671	0.02507698	0.00883722
日本金属工業	三井金属鉱業	古河機械金属	オークマ	井関農機
0.00908568	0.00588653	0.03090091	0.0040898	0.00490462
クボタ	荏原	千代田化工	日本ピストン	明電舎
0.02924615	0.0241714	2.3E-08	0.00632316	0.00895416
富士通	パイオニア	トヨタ自動車	マツダ	キヤノン
0.00398556	0.02689093	0.01499298	0.00214977	0.0025564
リコー	凸版印刷	三越	東京三菱銀行	三和銀行
0.08794447	0.05906372	0.0098958	0.01547782	0.04202268
三井信託銀行	三菱信託	野村証券	東京海上	三井海上
0.00600834	0.0139734	0.04617678	0.01033354	0.00564696
三菱地所	日本郵船	ナビックス	全日本空輸	三菱倉庫
0.00809045	0.0066825	0.01559361	0.00709069	0.03020224
東京電力	関西電力	東京ガス	大阪ガス	東京ドーム
0.02912472	0.01114092	0.02914551	0.02470092	0.05737228

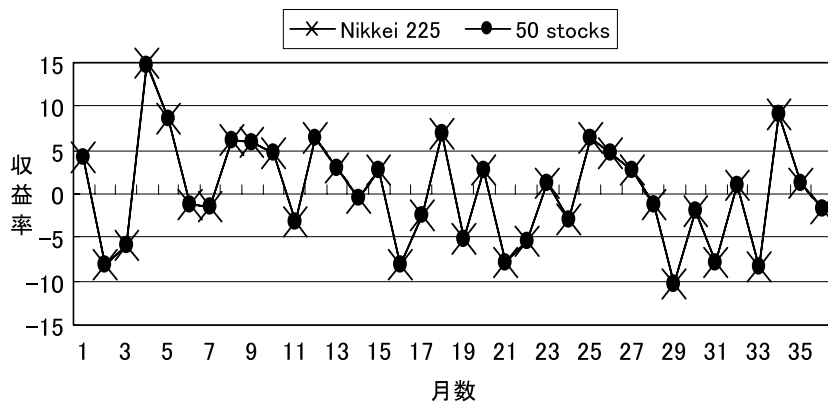


図1 生成したインデックス・ファンドと日経225との収益率の比較

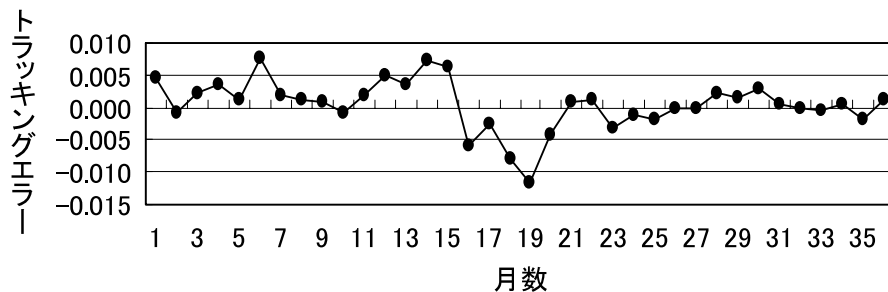


図2 トラッキングエラー

4. インデックス・プラス・アルファ・ファンドの最適化

インデックス・プラス・アルファ・ファンドとは、市場インデックスを追従しながら且つ市場インデックスのパフォーマンスを上回る（プラスアルファ）ことのできるファンドである。従来、プラスアルファの部分は、ファンドマネージャーの手腕に頼る部分が大きく、長期間に渡って安定して市場インデックスのパフォーマンスを上回ることのできるインデックス・プラス・アルファ・ファンドを編成することは難しいとされていた。本論文では、ISC法をインデックス・プラス・アルファ・ファンド最適化問題に適用し、市場インデックスを追従しながら且つ長期間に渡って安定して市場インデックスのパフォーマンスを従来にはない高い割合で上回ることのできるインデックス・プラス・アルファ・ファンドの生成とそのファンドの有効性の検証のための計算実験を次のように行った。

（インデックス・プラス・アルファ・ファンドの生成とその有効性の検証）

計算実験は、市場インデックス（日経 225）の 1994 年 4 月から 1999 年 3 月までの 5 年間の実データを用いて行われた。インデックス・プラス・アルファ・ファンドの生成は、日経 225 の 1994 年 4 月から 1996 年 3 月の 2 年間の実データを使用し、また生成されたインデックス・プラス・アルファ・ファンドの有効性評価のために日経 225 の 1996 年 4 月から 1999 年 3 月の 3 年間の実データを使用した。すなわち、図 3 に示すように、実験期間 5 年間の前半 2 年の実データを用いてインデックス・プラス・アルファ・ファンドを生成し、本実験で生成したインデックス・プラス・アルファ・ファンドを用いて 1996 年 4 月に運用を開始したとして、それ以降の 3 年間について日経 225 の値動きと本実験で生成したインデックス・プラス・アルファ・ファンドの値動きを比較した。計算実験には、1.7 GHz、Pentium 4 の CPU、1 GB のメモリが搭載されたパーソナルコンピュータを使用した。

① インデックス・プラス・アルファ・ファンドの生成

（手順 1）擬似軌跡の作成

インデックス・プラス・アルファ・ファンドを生成するために、1994 年 4 月から 1999 年 3 月の 2 年間の市場インデックス（日経 225）の値動きを基準

にして、日経 225 を追従しながら且つ長期間に渡って安定して日経 225 のパフォーマンスを従来にはない高い割合で上回るファンドを生成するために、次のように擬似軌跡を生成する。すなわち、1996 年 4 月（運用開始ポイント）の日経 225 の月次データからの減少率を 0 % とし、順次 1996 年 3 月の日経 225 の月次データからの減少率を 0.5 %、1996 年 2 月を減少率 1.0 %、・・・、1994 年 4 月の減少率を 12.0 % とした擬似軌跡を作成する。ここで作成した擬似軌跡は、日経 225 の変化に追従しながら、運用開始ポイントの 1996 年 4 月に向かって上り基調となっている。

（手順 2）手順 1 で作成した擬似軌跡を高精度で追従するようなファンドを生成するために ISC 法を適用する。実験では、日経平均 225 銘柄の中から擬似軌跡を追従するような 50 銘柄を ISC 法によって抽出しかつ抽出した各銘柄の組み入れ比率を求め、インデックス・プラス・アルファ・ファンドの生成を行った。

② 有効性の検証

上記の①求めたインデックス・プラス・アルファ・ファンド（ISC 法によって抽出した 50 銘柄と各銘柄への投資率）を 1996 年 4 月に運用を開始したとして、1996 年 4 月から 1999 年 3 月までの実データを用いて、シミュレーションを行った。その結果、図 3 に示すように本実験で生成したファンドは極めて有効なインデックス・プラス・アルファ・ファンドであることが確かめられた。すなわち、市場インデックス（日経 225）を追従しながら且つ市場インデックスのパフォーマンスを上回るファンドを生成していることが検証できた。

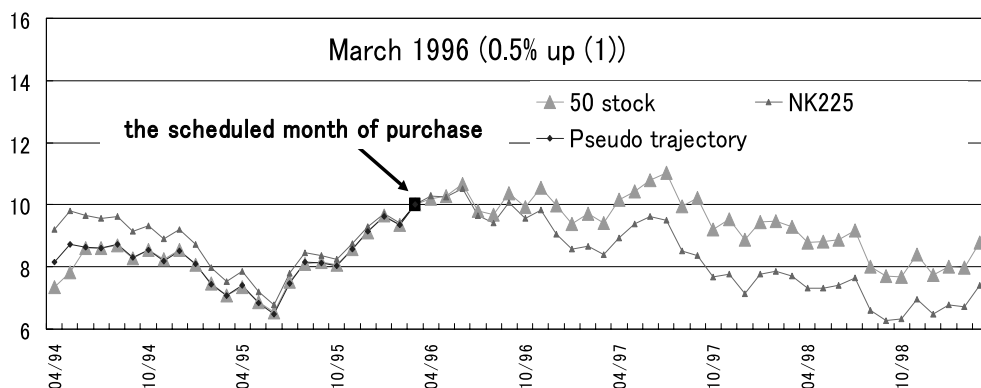


図 3 生成したインデックス・プラス・アルファ・ファンドの運用シミュレーション

5. ISC法の可能性

ISC 法で解くことのできる多次元非線形ナップザック問題は次のように記述できる。

$$\begin{aligned} \text{maximize } f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n g_{ji}(x_i) \leq b_j \quad (j \in M) \\ x_i &\in K_i \quad (i \in N) \end{aligned}$$

ここで、 $f_i(x_i)$ 、 $g_{ji}(x_i)$ は変数分離可能な関数、 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 、 $K_i = \{1, 2, \dots, k_i\}$ であり、 x_i について、それぞれ k_i 個の選択可能な項目（項目案）が用意されており、 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 、 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ である。ISC法は、3 制約条件式をもち 1000 変数で各変数が 20 個の代替項目をもつ問題や 8 制約で 500 変数 50 代替項目の問題のように従来は解くことが困難であった極めて大規模な問題をパソコンレベルのコンピュータを用いて実用時間で厳密に解くことができる。また、本論文で報告したように、目的関数が非分離形関数であっても、微分可能であれば一次近似することでこの種の大規模な問題についても実用レベルの解を求めることができる。すなわち、遺伝子情報解析、マーケティング、スケジューリング、気象、環境等の膨大なデータを解析するような分野の現実の問題を多次元非線形ナップザック問題として定式化することができれば、今まで解くことが難しいとされていた大規模な問題も解くことができるのである。例えば、本論文で報告したインデックス・ファンド最適化問題のサイズは 3.68×10^{50} の組み合わせ数であり、これは地球上の水の分子の数が約 4.6×10^{46} であることを考えれば、それを解くことの困難性が理解できるであろう。

なお、本論文では日経 225（225 銘柄）を対象として ISC 法の適用実験を行い、生成されたインデックス・プラス・アルファ・ファンドの有効性を示したが、同様に TOPIX に対しても有効なファンドを生成できることが確かめられている。TOPIX を対象としたインデックス・プラス・アルファ・ファンド最適化問題は、TOPIX を追従しながらかつ安定して TOPIX のパフォーマンスを上回るように、TOPIX に含まれる全銘柄（1440 銘柄）の中から任意の銘柄（例えば 50 銘柄）を抽出しかつ抽出した各銘柄の組み入れ比率を決

定する必要があり、従来の最適化手法では解くことが極めて困難な問題である。

6. あとがき

本論文では、ISC 法を金融工学分野の従来解くことが極めて難しいと考えられていた最適化問題（インデックス・プラス・アルファ・ファンド最適化問題）に適用し、計算実験によりその有効性を明らかにした。ISC 法は大規模な多次元非線形ナップザック問題をパソコンレベルのコンピュータを用いて厳密に解くことができる。さらに、多次元非線形ナップザック問題の目的関数が非分離形関数であっても、それが微分可能であれば一次近似することにより、ISC 法を適用することが可能となる。今後は、ISC 法を遺伝子情報解析、マーケティング、スケジューリング、気象、環境等の膨大なデータを解析するような分野の問題に適應するための研究を進める予定である。

参考文献

- [1] 仲川勇二、疋田光伯、鎌田弘（1984）代理双対問題を解くためのアルゴリズム、電子情報通信学会論文誌 *J67-A, no.1*, 53-59
- [2] 仲川勇二（1990）離散最適化問題のための新解法、電子情報通信学会論文誌 *J73-A, 3*, 550-556
- [3] 疋田光伯、宮地功、仲川勇二、伊藤俊秀、木村作郎（1995）An algorithm for solving multi-objective discrete optimization problems、京都大学数理解析研究所講究録 889, 125-132
- [4] 疋田光伯、仲川勇二、伊藤俊秀、宮下文杉、宮地功（1997）多目的最適化アルゴリズムの評価、京都大学数理解析研究所講究録 981, 64-71
- [5] 仲川勇二、疋田光伯（1997）多目的最適化問題に対する代理目的の導入、京都大学数理解析研究所講究録 981, 24-31
- [6] 仲川勇二、疋田光伯（2000）多目的離散最適化問題のための対話型意思決定アルゴリズム、日本経営工学会論文誌 *51, 3*, 196-202
- [7] 田畑吉雄（2002）金融工学入門、エコノミスト社
- [8] 仲川勇二、甲斐良隆、田畑吉雄（2004）離散最適化用改良代理制約法のインデックス・ファンド問題への適用、日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集 64-65
- [9] 甲斐良隆、仲川勇二、田畑吉雄（2005）改良代理制約法の非分離形非凸計画問題への応用、電子情報通信学会論文誌 *J88-A, 3*, 422-424
- [10] 仲川勇二、疋田光伯（2005）ファンド構成決定装置、ファンド構成決定方法、及びコンピュータプログラム、日本特許庁、特願 2005-179691
- [11] Glover, F. (1968) Surrogate constraint. *Operations Research*, *16*, 741-749
- [12] Dyer, M.E. (1980) Calculating surrogate constraints. *Math. Program.*, *19*, 255-278
- [13] Nakagawa, Y. and Miyazaki, S. (1981) Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with two constraints. *IEEE Trans. Reliab.*, *R-30, 2*, 175-180
- [14] Nakagawa, Y., Hikita, M., and Kamada, H. (1984) Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with multiple constraints. *IEEE Trans. Reliab.*, *R-33, 4*,

- [15] Hikita, M., Nakagawa, Y., Nakashima, K. and Narihisa, H. (1992) Reliability optimization of systems by a surrogate-constraints algorithm. *IEEE Trans. Reliab.*, 41, 473-480
- [16] Tabata, Y. and Takeda, E. (1995) Bicriteria optimization problem of designing an index fund. *J. Operations Research Society*, 46, 1023-1032
- [17] Nakagawa, Y. (1998) A reinforced surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. *RIMS 1068, Kyoto University*, 194-202
- [18] Nakagawa, Y. and Iwasaki, A. (1999) Modular approach for solving nonlinear knapsack problems. *IEICE Trans. Fundamentals*, E82-A, 9, 1860-1864
- [19] Hikita, M. and Nakagawa, Y. (1999) A method for solving multi-objective discrete optimization problem. *Proceedings of the Western Pacific and Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, 23-26
- [20] Hikita, M. and Nakagawa, Y. (2000) Interactive decision making algorithm for multi-objective nonlinear knapsack problem. *Proceedings of the China-Japan International Symposium on Industrial Management*, 67-70
- [21] Nakagawa, Y. (2003) An improved surrogate constraints method for separable nonlinear integer programming. *Journal of Operations Research Society of Japan*, 46, 145-163

高松大学紀要
第 50 号

平成20年 9 月25日 印刷
平成20年 9 月28日 発行

編集発行 高 松 大 学
高 松 短 期 大 学
〒761-0194 高松市春日町960番地
TEL (087) 841 - 3255
FAX (087) 841 - 3064

印 刷 株式会社 美巧社
高松市多賀町 1 - 8 - 10
TEL (087) 833 - 5811