高松大学紀要，31．83～93

代理目的による多目的意思決定問題の一解法

疋　田　光　伯

1．はじめに

代理制約という考え方は，Glover[1)]により初めて数理計画法の分野に取り入れられた。この方法は主問題を解く代わりに複数個の制約関数を代理乗数を用いて単一の制約関数に変換した問題（代理問題）を解くことによって，比較的簡単に主問題の最適解を求めるものである。その後，代理制約に関する理論面が研究され[2)−5)]，各種の問題を解くための実用的なアルゴリズムがいくつか提案されている[6)−13)]。

本論文では，多目的意思決定問題に代理目的という概念を導入する。我々の取り扱う問題は，変数が離散値をとる多目的意思決定問題であり，単一制約で，複数個の目的関数の最適値に幅（ε）を持たせて，すべての目的関数がその範囲内に入る実行可能解を列挙する問題である。εを調整することによって任意のサイズと性質の実行可能解を求めることができる。この問題を標的問題と名付ける。標的問題の実行可能解に対して目的関数間の優越操作を行えばパレート最適解を求めることができる。意思決定者はこれらパレート最適解の中から自分の価値観に合った選好最適解を求める必要がある。

提案する手法は，まず，主問題の複数個の目的関数を代理乗数（**u**）によって単一の目的関数（代理目的）に変換する。この代理目的と原問題の制約関数によって定義された問題を代理問題とする。代理問題を解いて得られた実行可能解に対して目的関数間の優越操作を行えばパレート最適解を求めることができる。代理問題のパレート最適解は原問題のパレート最適解となっている。すなわち，原問題を解く代わりにその代理問題を解くことによって，原問題のパレート最適解を求めることができる。代理問題を解く方法としてはモジュラーアプローチ[14)]を用いる。この方法は大規模な単一制約離散最適化問題を効率よく解くことができる。代理問題にモジュラアプローチを適用することによって，実用規模の標的問題を解くことが可能となる。計算機実験の結果，大規模な標的問題（例えば，3目的，800変数，10代替案）がパーソナルコンピュータでも十分解けることが確かめられた。さらに，本論文では，代理目的を用いた実用的な対話型意思決定アルゴリズムの例を示す。このアルゴリズムは代理目的を操作（**u**とεを変化）して対話形式で標的問題のパ

レート曲面の近傍を探索し，合理的にパレート最適解の中から選好最適解を求めることができる。数値例によって，その有用性を明らかにしている。

２．多目的意思決定問題と代理目的

本論文で取り扱う問題は，変数がすべて離散値をとる多目的意思決定問題として次のように定式化される。

（Ｐ１）：　$\max \quad \mathbf{f}(\mathbf{x})$

$\text{s.t.} \quad g(\mathbf{x}) \leqq b$

ここで，$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$は n 次元整数変数ベクトル，$\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\cdots,f_m(\mathbf{x}))^T$は m 次元ベクトル目的関数，$\mathbf{g}(\mathbf{x})$ は制約関数である。一般にすべての目的関数を同時に最大化する解は存在しない。その代わりに，ある目的関数の値を改善するためには，少なくとも他の一つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解の概念としてパレート最適解が定義されている。パレート最適解は単一解ではなく無限個の点集合である。実用上の問題では，これらパレート最適解の中から意思決定者の価値観に合うような単一解または適当な大きさの解集合（選好最適解）を求めなければならない。

問題Ｐ１に代理乗数 $\mathbf{u}$ を導入し，複数個の目的関数を単一の目的関数に変換した問題をＰ２とする。

（Ｐ２）：　$\max \quad \mathbf{uf}(\mathbf{x})$

$\text{s.t.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leqq b$

ただし　$\sum_{i=1}^{m} u_i=1,\ u_i \geqq 0$

任意の $\mathbf{u}$ に対する問題のＰ２の最適解は原問題のパレート最適解であることが知られている。

問題Ｐ１を実用的に取り扱うことができるように，目的関数の最適値にεだけの幅を持たせた次のような問題Ｐ３を考える。この問題を標的問題と呼ぶ。

（Ｐ３）：　$\text{target} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{f}^{opt}-\varepsilon$

$\text{s.t.} \quad g(\mathbf{x}) \leqq b$

ここで，$\mathbf{f}^{opt}=(f^{opt}_1,\cdots,f^{opt}_m)^T$はそれぞれの目的関数を単独で使用したときの目的関数の最適値ベクトル，$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m)^T$は各目的関数の最適値からの許容値ベクトルであ

る。すなわち，標的問題とは複数個の目的関数の最適値に幅（ε）を持たせて，すべての目的関数がその範囲内に入る実行可能解を列挙する問題である。ε を調整することによって任意のサイズと性質の実行可能解を求めることができ，実際的な問題の定式化となっている。但し，本論文では，目的関数および制約関数が変数分離型の問題を取り扱うものとする。

標的問題のパレート最適解を効率よく求めるために，標的問題に代理乗数 $\mathbf{u}$ を導入し，複数個の目的関数を代理乗数 $\mathbf{u}$ によって単一の目的関数に変換した問題Ｐ４を考える。

（Ｐ４）：　target　$\mathbf{uf}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{u}(\mathbf{f}^{opt} - \varepsilon)$

s.t.　$\mathrm{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathrm{b}$

ただし　$\sum_{i=1}^{m} u_i = 1,\ u_i \geqq 0$

問題Ｐ１およびＰ４はモジュラーアプローチ（MA）によって効率よく解くことができる。モジュラアプローチは分離可能な離散最適化問題を効率よく解くためのアルゴリズム設計法であり，計算実験によって大規模なこの種の問題を実用時間で解き得ることが文献［15］～［18］に報告されている。問題Ｐ４を解いて得られた実行可能解に対して問題Ｐ３の目的関数間の優越操作を行えばパレート最適解が得られる。ここで得られたパレート最適解は問題Ｐ３のパレート最適解である。

いま，$\mathbf{X}^T$ を問題Ｐ４の解集合とし，$\mathbf{X}^C$ を $\mathbf{X}^T$ 内で優越関係を適用して得られた解集合とする。すなわち，

$\mathbf{X}^C = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X}^T \mid \mathbf{f}(\mathbf{x}^1) \geqq \mathbf{f}(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{X}^1 \in \mathbf{X}^T$ が存在しない$\}$

とすれば，次の定理が成り立つ。

［定理］　解 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^C$ は問題Ｐ３のパレート最適解である。

［証明］　$\mathbf{x}^1$を問題Ｐ３の実行可能解とする。すなわち，

$\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathrm{g}(\mathbf{x}) \leqq \mathrm{b}\}$

とする。このとき，

$\mathbf{x}^1 \in \mathbf{X}^T$ の場合，$\mathbf{X}^C$ の定義より，$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{f}(\mathbf{x}^1)$ となるような $\mathbf{x}^1$ は存在しない。$\mathbf{x}^1 \notin \mathbf{X}^T$ の場合，任意の解 $\mathbf{x} \in \mathbf{X}^C$ に対して，

$\mathbf{uf}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{f}^{opt} - \varepsilon \geqq \mathbf{uf}(\mathbf{x}^1)$

となり，$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{f}(\mathbf{x}^1)$となるような解 $\mathbf{x}^1$ は存在しない。したがって，解 $\mathbf{x}^1$ は問題Ｐ３

のパレート最適解である。

（証明終）

いま，問題Ｐ４において目的関数空間における実行可能領域をF(X)とすると，代理目的はF(X)を切断する超平面であり，許容値εはF(X)を切断する深さに相当する。また，代理乗数 **u** により超平面がF(X)を切断する方向を変化することができる。すなわち，意思決定者は **u** で定義される超平面（代理目的）を用いてεの深さでF(X)を切断することによって任意のサイズと性質のパレート最適解集合を求めることができる。この方法は，パレート曲面からεの深さで実行可能領域を切断することによって，切り取った領域のパレート最適解をまとめて効率よく列挙できる。また，εによってある程度のパレート曲面のギャップを吸収でき，非凸な問題にも適用可能である。

３．計算機実験

前章までの議論で，多目的離散意思決定問題（標的問題）を解く代わりに，その代理問題を解くことによって，原問題を解き得ることが示された。本章では，代理問題にMAを適用することによって，実用規模の標的問題が解けることを計算機実験によって確かめる。実用規模の標的問題（Ｐ３）の代理問題（Ｐ４）をMAで解いた結果を表１に示す。問題は4.2で取り上げている多目的非線形ナップザック問題とし，３目的，10代替案で，変数の個数 n を100，200，400，800と変化させたときの解の個数とCPU時間（sec）を求めた。また，**u**＝（1/3，1/3，1/3）とし，εは解集合のサイズが適当な大きさになるように調整した。テスト問題は一様乱数（$1 \leqq f_{ij}(k+1) - f_{ij}(k) \leqq 2^{18}$）を用いて生成し，各３問を解いた。コンピュータは Power PC 603e/100MHz を使用した。実験結果より，実用規模の多目的離散意思決定問題が解けることが明らかになった。

表１　実験結果

n	100			200			400			800		
問題番号	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
CPU時間	6	8	7	11	10	10	43	34	37	153	146	143
解の個数	64	68	69	53	59	52	51	71	125	129	61	54

４．意思決定アルゴリズム

4.1　アルゴリズム

$\mathbf{u}$ と ε を操作して対話形式でパレート曲面の近傍を探索し，選好最適解を求めるアルゴリズムの例を示す。

（アルゴリズム）

step１．問題Ｐ１の各目的関数を単一で使用した問題をMAで解き，その解 $\mathbf{x}^{opt}$ から各目的の上限値 $\mathbf{f}(\mathbf{x}^{opt})$ を得る。

$k \leftarrow 1$

$\mathbf{u}^k \leftarrow (1/m, \cdots, 1/m)$

step２．$\mathbf{u}^k$ で定義される問題Ｐ２を解き，最適解 $\mathbf{x}^{k(opt)}$ とその目的関数値 $f(\mathbf{x}^{k(opt)})$ を得る。意思決定者は $f(\mathbf{x}^{k(opt)})$ からの許容値 ε を決める。

step３．$\mathbf{u}^k$ と ε で定義される問題Ｐ４を解き，パレート最適解集合 $\mathbf{X}^k$ を求める。$\mathbf{X}^k$ のサイズが適当ならば step４へ，さもなくば，ε を調整して，step３へ。

step４．$\mathbf{X}^k$ の中に意思決定者の価値観に合う解があればそれを選好最適解として終了する。さもなくば，$\mathbf{u}^k$ を更新して，$k \leftarrow k+1$ とし，step２へ戻る。

4.2　実行例

次に示す多目的非線形ナップザック問題を例題として，アルゴリズムの実行例を示す。各目的関数の代替案の値と制約関数の代替案の値を表２と表３に示す。

（例題）　多目的非線形ナップザック問題

$$\max \left\{ \sum_{i \in \mathbf{I}} f_{1,i}(x_i), \ \sum_{i \in \mathbf{I}} f_{2,i}(x_i) \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in \mathbf{I}} g_i(x_i) \leqq b$$

$$\mathbf{I} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$x_i = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad (i \in \mathbf{I})$$

$$b = 971$$

表２　目的関数の代替案の値

$f_{ij}(x_i)$		x_i				
j	i	1	2	3	4	5
1	1	19	66	74	90	147
	2	64	122	172	176	202
	3	59	101	143	166	197
	4	16	78	136	162	170
	5	5	27	64	81	121
	6	39	95	101	160	202
	7	23	32	61	122	163
	8	16	47	79	132	135
	9	14	18	46	78	121
	10	14	15	67	71	81
2	1	28	58	116	177	214
	2	58	93	155	217	220
	3	14	66	95	111	142
	4	23	31	78	86	119
	5	22	52	70	89	112
	6	15	18	24	55	89
	7	19	61	124	149	205
	8	25	72	84	95	110
	9	49	56	107	139	171
	10	64	126	152	155	168

表３　制約関数の代替案の値

$g_i(x_i)$	x_i				
i	1	2	3	4	5
1	48	112	114	145	157
2	62	82	89	146	209
3	14	16	53	56	74
4	2	8	24	63	66
5	26	83	138	150	209
6	52	95	97	134	177
7	58	117	167	170	206
8	8	52	72	86	105
9	26	57	117	161	173
10	51	99	154	201	219

（実行例）

step１．問題Ｐ１の各目的関数を単一で使用したときの問題をMAで解く。各目的関数の最適値を各目的の上限値として，意思決定に利用する。

$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1216$，$\mathbf{x}^{opt}=$（５，３，５，５，１，５，５，４，１，１）

$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$，$\mathbf{x}^{opt}=$（５，４，５，５，１，１，５，５，１，２）

代理乗数を$\mathbf{u}^1=$（0.5，0.5）とする。

step２．問題Ｐ２を解く。

$\mathbf{u}^1 f(\mathbf{x}^{opt})=1185$, $\mathbf{x}^{opt}=$（５，３，５，５，１，５，５，４，１，１）

適当な大きさのパレート最適解集合を得るために $\varepsilon=15$ とする。

step３．問題Ｐ４（$\mathbf{u}^1=(0.5,\ 0.5)$，$\varepsilon=15$）をMAで解き，得られた解集合に対して目的関数間の優越操作を行い次のパレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,5,5,4,1,1)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1216$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1154$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1183$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1175$

パレート最適解のサイズが適当であるのでstep４へ。

step４．f_1 が上限値（＝1216）に達しているので，f_2 を増やす方向に探索するため，$\mathbf{u}^2=$（0.25，0.75）としてstep２へ。

step２．問題Ｐ２を解く。

$\mathbf{u}^2 f(\mathbf{x}^{opt})=1179.5$　$\mathbf{x}^{opt}=$（５，４，５，５，１，１，５，５，１，２）

適当な大きさのパレート最適解集合を得るために $\varepsilon=4.5$ とする。

step３．問題Ｐ４($\mathbf{u}^2=(0.25,\ 0.75)$，$\varepsilon=4.5$）をMAで解き，得られた解集合に対して目的関数間の優越操作を行い次のパレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1061$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1183$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1175$

パレート最適解のサイズが適当であるのでstep４へ。

step４．f_2 が上限値（＝1219）に達したので，$\mathbf{u}^3$ は変化せず $\mathbf{u}^3=$（0.25，0.75）としてstep２へ。

step２．問題Ｐ２を解く。

$\mathbf{u}^3 f(\mathbf{x}^{opt})=1179.5$，$\mathbf{x}^{opt}=$（５，４，５，５，１，１，５，５，１，２）

パレート曲面をより深く切断するために $\varepsilon=9.5$ とする。

step３．問題Ｐ４($\mathbf{u}^2=(0.25,\ 0.75)$，$\varepsilon=9.5$）をMAで解き，得られた解集合に対して目的関数間の優越操作を行い次のパレート最適解を得る。

$\mathbf{x}^{opt}=(5,4,5,5,1,1,5,5,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1061$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1219$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,4,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1175$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1182$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,3,1,5,5,4,1,2)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1183$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1175$

$\mathbf{x}^{opt}=(5,3,5,5,1,1,5,3,5,1)$，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1107$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1191$

$\mathbf{x}^{opt}$＝(５，４，５，５，１，１，５，４，２，２)，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1062$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1211$

$\mathbf{x}^{opt}$＝(５，４，５，３，１，１，５，５，１，３)，$f_1(\mathbf{x}^{opt})=1079$，$f_2(\mathbf{x}^{opt})=1204$

パレート最適解のサイズが適当であるのでstep４へ。

step４．この結果 $\mathbf{x}^{opt}$＝（５，４，５，３，１，１，５，５，１，３）が上限値と比較してもバランスの取れたパレート最適解であるので，これを選好最適解として採用する。

５．おわりに

本論文では，多目的意思決定問題に代理目的を導入することによって効率よくパレート最適解を列挙できることを示した。また，これを利用した選好最適解を求めるアルゴリズムの一例を示し，数値例によってその有用性を確かめた。さらに，目的関数の最適値からの許容値 ε によって，ある程度のパレート曲面のギャップを吸収することができ，非凸な問題にも適用可能であることを明らかにした。代理乗数 $\mathbf{u}$ の定義域を意思決定空間と考え，対話形式で $\mathbf{u}$ の最適化を行なうことによって，意思決定者の価値観をより十分に反映した選好最適解を得ることができるであろう。今後の課題としては，$\mathbf{u}$ の最適化による意思決定アルゴリズムの構築が残されている。

謝辞　本研究を遂行するにあたってご討議を頂いた，関西大学総合情報学部仲川勇二教授，松下電器産業㈱技術部伊佐田百合子主任に深謝致します。

参考文献

［１］Glover，F.：“A multiphase-dual algorithm for zero-one integer programming problem”，Operations Research，No.13，pp.879－919（1965）.

［２］Glover，F.：“Surrogate constrains”，Operations Research，No.16，pp.741－749（1968）.

［３］Luenberger，D.G.：“Quasi-convex programming”，SIAM Journal of Applied Mathematics No.16，pp.1090－1095（1968）.

［４］Glover，F.：“Suurogate constraints duality in mathematical programming”，Operations Research，No.23，pp.434－451（1975）.

［５］Greenberg，H.J.，and Pierskalla，W.P.：“Surrogate mathematical programs”，Operations Research，No.18，pp.924－939（1970）.

［6］Nakagawa，Y．and Miyazaki，S．：“Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problem with two constraints”，IEEE，Transaction Reliability，R-30，pp．175－180（1980）．

［7］Dyer，M.E．：“Calcurating surrogate constraints”，Mathematical Programming，19，pp.255－278（1980）．

［8］仲川勇二，疋田光伯，鎌田　弘：「代理双対問題を解くためのアルゴリズム」，電子情報通信学会論文誌(A)，Vol.J67-A，No.１，pp.53－59（1984）．

［9］Nakagawa，Y.，Hikita，M．and Kamada，H．：“Surrogate constraints algorithm for reliability optimization problems with multiple constraints”，IEEE Transactions on Reliability．R-33，pp.301－305（1984）．

［10］Hikita，M.，Nakagawa，Y．and Nakashima，K．：“Application of the surrogate constraints algorithm to optimal reliability design of systems”，Microelectronics and Reliability，Vol.26，No.１（1986）．

［11］Hikita，M.，Nakagawa，Y．and Nakashima，K．：“Reliability optimization of systems by the surrogate constraints algorithm with the countermeasures to surrogate gaps”，Proceedings of the 13th International Symposium on Mathematical Programming Vol.２，pp.323－324（1988）．

［12］Hikita，M.，Nakagawa，Y.，and Nakashima，K．：“Optimal design problems of highly reliable systems and their solution methods by surrogate constraints algorithm”，Electronics and Communications，Vol.71，No.10，pp.１－12（1988）．

［13］Hikita，M.，Nakagawa，Y.，Nakashima，K．and Narihisa，H：“Reliability optimization of systems by asurrogate-constraints algolithm”，IEEE Transactions on Reliability，Vol.41，No.３，pp.473－480（1992）．

［14］仲川勇二：「離散最適化問題のための新解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol.J73-A，No.３，pp.550－556（1990）．

［15］仲川勇二，疋田光伯，岩崎彰典：「多重選択ナップザック問題の高速厳密解法」，電子情報通信学会論文誌，Vol.J75-A，No.11，pp.1752－1754（1992）．

［16］疋田光伯，岩崎彰典，仲川勇二：「モジュラ法の非線形計画問題への適用」，電子情報通信学会論文誌，Vol.J76-A，No.１，pp.64－67（1993）．

［17］A．Iwasaki，M．Hikita，Y．Nakagawa and H．Narihisa：“An application of modu-

lar approach to separable nonlinear programming problem ”, RIMS Kokyuroku，No. 864，pp.83－90（1994）.
［18］疋田光伯：「非線形計画問題の一解法」，四国大学紀要，No. 2，pp.19－24（1994）.
［19］疋田光伯，仲川勇二，宮地功：「多目的離散最適化問題を解くためのアルゴリズム」，京都大学数理解析研究所講究録，No.889，pp.125－132（1995）.
［20］疋田光伯，宮下文琳，仲川勇二，伊藤俊秀：「多目的離散最適化アルゴリズムの評価」，京都大学数理解析研究所講究録，No.981，pp.64－71（1995）.
［21］疋田光伯：「多目的離散計画問題とその対話型意思決定」，高松大学紀要，No.27，pp.378－388（1997）.

A Method for Solving Multiobjective Decision Making Problems by Surrogate Objective

Mitsunori Hikita

This paper presents a solution method for multiobjective decision making problems. We translate an original problem into a surrogate problem using a surrogate multiplier. Surrogate problem with only one objective, which appear in the optimization process, are solved by modular approach. The pareto optimal solution of the surrogate problem is equivalent to the pareto optimal solution of the original problem. In other words, the solution of the original problem can be obtained by solving the surrogate problem. The modular approach solves large-scale discrete optimization problems by using the fathoming and integration techniques repeatedly. This enable us to solve large-scale multiobjective decision making problems. An example shows that our solution method gives a pareto optimal solution given problem.

高 松 大 学 紀 要
第　31　号
平成11年３月15日　印刷
平成11年３月19日　発行

編集発行　高　　松　　大　　学
高　松　短　期　大　学
〒761-0194　高松市春日町960番地
TEL（087）841－3255
FAX（087）841－3064